Feladatok az 1. zárthelyi dolgozat anyagához

Matematikai Gyakorló és érettségire felkészítő feladatok

I. kötet, K2 jelű feladatok, esetleg E1 jelű feladatok

81-98. oldal

107-135. oldal

137-150. oldal

164-181. oldal

207-220. oldal

Fizikai és kémiai fogalmak

fizikai mennyiségek, mértékegységek, mértékegység analízis, mértékegységek átváltása, értékes jegyek száma

nyomás, hőmérséklet, tömeg, térfogat, sűrűség

egyszerű kémiai reakcióegyenletek felírása, sav-bázis reakciók

út, sebesség, gyorsulás, energia, impulzus, kinetikus energia, potenciális energia, energiamegmaradás elve,

ideális gázok, gáztörvények, anyagmennyiség

atomok, molekulák tulajdonságai, tömeg, méret, sebesség, energia

koncentrációszámítás, elegyítési feladatok, egyensúlyi állandó, savi disszociációállandó, pH

fény, fény jellemző mennyiségei, fény kvantumos jellege, energiája, impulzusa

Eddigi feladatok gyűjteménye

1. fejezet

Használjuk fel az 1. fejezetben kifejtett gondolatokat, valamint saját tapasztalatainkat és elképzeléseinket a következő gyakorlatok elemzéséhez. Pontos értékeket *nem* szükséges kiszámolni.

1.1. A közönséges levegő sűrűsége kb. 0,001 gcm^{-3}, a folyékony levegőé kb. 1,0 gcm^{-3}.

a) Becsüljük meg az 1 cm^3-re eső levegőmolekulák számát közönséges és folyékony levegőben.

b) Becsüljük meg egy levegőmolekula tömegét.

c) Becsüljük meg azt az átlagos távolságot, amelyet egy levegőmolekula két egymásra következő ütközés közt befut normál hőmérséklet és nyomás esetén. Ezt a távolságot *átlagos szabad úthossznak* nevezik.

d) Becsüljük meg, milyen nyomás mellett kell működtetni a vákuumrendszert atmoszférában kifejezve, hogy az átlagos szabad úthossz kb. 1 m legyen.

Megoldás:

$2{,}7\times10^{19}$ cm^{-3}, $2{,}7\times10^{22}$ cm^{-3}, $3{,}7\times10^{-23}$ g, $3{,}2\times10^{-5}$ cm, $3{,}2\times10^{-2}$ Pa

---

1.2. Hajdan egy felhőszakadás egyik esőcseppje paleozoikus agyagrétegre hullott és nyomot hagyott rajta, melyet később mint kövületet kiásott egy lelkes és szomjas geológus hallgató. Amint kulacsát felhajtotta, elmerengett rajta, vajon hányat ihatott meg e hajdani esőcsepp vízmolekulái közül. Becsüljük meg ezt a számot az eddig megismert adatok alapján. (Tegyünk ésszerű feltételezéseket az általunk ismeretlen szükséges információkat illetően.)

Megoldás: 3

1.1. példa: *A nyomás kiszámítása*

Tegyük fel, hogy ISAAC NEWTON tömege 65 kg volt. Számítsuk ki azt a nyomást, amit (a) 250 cm^2 talpfelületű csizmában, illetve (b) 2 cm^2 élfelületű korcsolyában fejtett ki a talajra.

Megoldás: Az m tömegű test (ISAAC) által kifejtett, a földfelületre ható erő: $F=mg$, ahol g a nehézségi gyorsulás, 9,81 $m\,s^{-2}$. ISAAC esetében

$$F=65\ kg\times 9{,}81\ m\,s^{-2}=638\ N,$$

mivel $1\ N=1\ kg\,m\,s^{-2}$. Az erő a lábbelitől függetlenül azonos. A kifejtett nyomás mindkét esetben $p=F/A$, ahol A az a felület, amire az erő hat. Ezáltal:

$$\text{(a)}\ p=\frac{638\ N}{2{,}5\times 10^{-2}\ m^2}=2{,}6\times 10^4\ Pa,\ 26\ kPa,$$

$$\text{(b)}\ p=\frac{638\ N}{2{,}0\times 10^{-4}\ m^2}=3{,}2\times 10^6\ Pa,\ 3{,}2\ MPa.$$

Megjegyzés: A 26 kPa nyomás 0,26 atm-nak, a 3,2 MPa pedig 31 atm-nak felel meg. A kis 8-as a 638-ban nem „értékes számjegy", de a számítások közbeeső lépéseinél figyelembe vesszük.

Gyakorlás: Számítsuk ki az 1 kg tömegű test által egy $1\times 10^{-2}\ mm^2$ felületű tű hegyén keresztül a földfelszínre kifejtett nyomást.

[981 MPa, $9{,}7\times 10^3$ atm]

1.2. példa: *Egy folyadékoszlop által kifejtett nyomás kiszámítása*

Számítsuk ki egy ϱ sűrűségű és h magasságú folyadékoszlop nyomását a földfelszinen.

Megoldás: Legyen az oszlop sugara r, keresztmetszete πr^2 és térfogata $\pi r^2 h$. Mivel a folyadéktérfogat tömege $m=\varrho\pi r^2 h$, az alapra kifejtett erő:

$$F=mg=\varrho\pi r^2 hg.$$

A nyomást ezen erő és az erőhatásnak kitett felület – ami éppen az oszlop keresztmetszete – hányadosa adja meg:

$$p=\frac{F}{A}=\frac{\varrho\pi r^2 hg}{\pi r^2}.$$

Tehát bármelyik ϱ sűrűségű folyadék esetén, melynek folyadékoszlop-magassága h, az oszlop alján a nyomás:

$$p=\varrho gh.$$

Megjegyzés: A nyomás tehát független a folyadékoszlop sugarától.

Gyakorlás: Számítsuk ki a nyomást egy olyan folyadékoszlop alján, melynek hossza l és dőlésszöge θ. [$\varrho gl\cos\theta$]

1.3. példa: *Hőmérséklet átszámítása*

Fejezzük ki a 25 °C hőmérsékletet kelvinben.

Megoldás: Ez ugyan numerikusan nagyon egyszerű feladat, ugyanakkor jó lehetőséget teremt arra, hogy az előbbi kifejezés jelentőségét bemutassuk. „Fizikai mennyiségekkel való számolás"-nak hívjuk (itt és a könyv további részében) azt a számolási eljárást, amelyikben olyan fizikai mennyiségek (például Θ) fordulnak elő, amelyek egy szám (25) és egy egység (°C) szorzatai, azaz 25 °C jelöli a 25 × °C-t. Tehát Θ/°C azt jelenti, hogy a 25 × °C fizikai mennyiséget elosztottuk a °C mértékegységgel:

$$\Theta/°\mathrm{C} = 25.$$

Az átalakítást a következőképpen olvassuk:

$$T/\mathrm{K} = 25 + 273{,}15 = 298.$$

Mindkét oldalt megszorozva a K egységgel azt kapjuk, hogy

$$T = 298\ \mathrm{K}.$$

A hőmérséklet hatása

A tökéletes gázokra vonatkozó egyetemes gáztörvény egy másik sajátos esetét kapjuk, ha a gáz nyomását (p) és menyiségét (n) tartjuk állandó értéken. Ezt nevezzük a **Gay–Lussac-törvény**nek:

$$V \propto T \quad \text{(ha } n, p \text{ állandó).} \qquad (4a)°$$

Hasonló az összefüggés, ha a mennyiség és a térfogat állandó:

$$p \propto T \quad \text{(ha } n, V \text{ állandó).} \qquad (4b)°$$

A nyomás lineáris hőmérsékletfüggését az 1.3. ábrán láthatjuk. Ez a két egyenlet arra alkalmas, hogy egy adott mennyiségű tökéletes gáz melegítésre vagy hűtésre bekövetkező térfogatváltozását állandó nyomáson, illetve nyomásváltozását állandó térfogaton megadhassuk:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{(ha } n, p \text{ állandó),} \qquad (5a)°$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{(ha } n, V \text{ állandó).} \qquad (5b)°$$

1.4. példa: *A gáztörvények alkalmazása*

Egy ipari folyamatban a nitrogén 500 K-re melegszik fel az állandó térfogatú reaktorban. Kezdetben a reaktorban 100 atm volt a nyomás és 300 K a hőmérséklet. Az üzemi hőmérsékletet elérve mekkora lesz a nyomás?

Megoldás: Egyéb részletesebb információ híján tegyük fel, hogy a gáz tökéletes. Mivel a térfogat állandó, az előbbi egyenlet átrendezésével azt kapjuk, hogy

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} \times p_1 = \frac{500\ \mathrm{K}}{300\ \mathrm{K}} \times 100\ \mathrm{atm} = 167\ \mathrm{atm}.$$

Megjegyzés: A kísérletek azt mutatták, hogy valójában a nyomás 183 atm az adott körülmények között, tehát a tökéletes gázként való közelítés hibája 10%.

Gyakorlás: Milyen hőmérsékletet eredményezne, ha ez előbbi példában a nyomást 300 atm-ra emelnénk? [900 K]

1. feladat

Egy 20 dm^3-es acélpalackban 8 kg oxigén van, amelyet tekintsünk reális gáznak.

1. Milyen hőmérsékletig szabad melegíteni a palackot, ha a nyomás nem lehet nagyobb 3×10^7 Pa-nál?
2. Milyen eredményt kapunk a tökéletes gáz állapotegyenletével számolva?
3. Becsüljük meg az oxigénmolekula sugarát!
4. Mekkora az oxigén kritikus térfogata?

A van der Waals–állandók oxigénre $a = 1{,}35\times10^5\ \mathrm{Pa}\times\mathrm{dm}^6\times\mathrm{mol}^{-2}$,
$b = 0{,}0318\ \mathrm{dm}^3\times\mathrm{mol}^{-1}$.

Megoldás

1. A megadott tömegű oxigén anyagmennyisége:

$$n = \frac{m}{M} = \frac{8000\ \mathrm{g}}{32\ \mathrm{g/mol}} = 250\ \mathrm{mol}$$

A van der Waals–egyenlet n anyagmennyiségű gázra

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Behelyettesítve az a és b állandókat, továbbá a térfogatot, az anyagmennyiséget és a megadott maximális nyomást, kiszámíthatjuk a hőmérsékletet

$$(3\times10^7 + \frac{1{,}35\times10^{-1}\times250^2}{(2\times10^{-2})^2})\times(2\times10^{-2} - 250\times3{,}18\times10^{-5}) = 250\times8{,}314\times T$$

$$T = 296{,}35\ \mathrm{K}$$

2. A tökéletes gáz állapotegyenletével számolva:

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{3\times10^7\times2\times10^{-2}}{250\times8{,}314} = 288{,}68\ \mathrm{K}$$

3. Az oxigénmolekula sugara a b állandó értékéből számítható ki. Gömb alakú molekulát feltételezve:

$$\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{4}\frac{b}{N_A}$$

Egy molekula térfogata:

$$\frac{1}{4}\times3{,}18\times10^{-5}\,\frac{1}{6{,}02\times10^{23}} = 1{,}321\times10^{-29}\ \mathrm{m}^3$$

A molekula sugara:

$$r^3 = \frac{3}{4}\times1{,}321\times10^{-29}\,\frac{1}{3{,}14} = 3{,}1553\times10^{-30}\ \mathrm{m}^3$$

$$r = 1{,}467\times10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Mekkora lenne a normálállapotú levegő $(T = 0°C;\quad p = 101\,kPa)$ oxigén és nitrogén molekuláinak sebessége, ha valamennyien ugyanakkora mozgási energiával rendelkeznének?

Megoldás:

461 m/s és 493 m/s

9.7. példa: *Egy sav pH-jának kiszámítása*

Számítsuk ki a 0,20 M HCN(*aq*) oldat pH-ját.

Megoldás: Az egyensúly, amit figyelembe kell vegyünk:

$$HCN(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons CN^-(aq) + H_3O^+(aq).$$

$$K_a = \frac{a(H_3O^+)a(CN^-)}{a(HCN)}.$$

Mindegyik CN^--ion keletkezése egy H_3O^+-ion képződésével jár együtt, így koncentrációjuk megegyezik, és ezért érdemes azt írni, hogy $a(H_3O^+) \approx a(CN^-)$. Híg oldatban a HCN-molekulák aktivitása közel azonos a koncentrációjukkal, ezért azt írhatjuk, hogy $a(HCN) \approx [HCN]/M$. Mivel K_a ennyire kicsi (a 9.2. táblázat alapján ($K_a = 4{,}9 \times 10^{-10}$), feltételezhetjük, hogy csak nagyon kevés HCN-molekula disszociálódott és így $[HCN] \approx 0{,}20$ M. Ennélfogva

$$a(H_3O^+) \approx (K_a \times [HCN]/M)^{1/2},$$

majd logaritmizálva azt kapjuk, hogy

$$pH \approx 0{,}5\,pK_a - 0{,}5\log([HCN]/M)$$
$$\approx 0{,}5 \times 9{,}31 - 0{,}5\lg 0{,}20 = 5{,}0.$$

Megjegyzés: Mivel jó néhány közelítést tettünk, a számszerű eredmények két értékes jegynél jobban nem megbízhatóak, sőt még ez is túl optimista becslés.

Gyakorlás: Számítsuk ki a 0,10 M $NH_3(aq)$ pH-ját. [11,1]

A teljes elektromágneses spektrum optikai tartományában a látható sáv hullámhosszhatárai -kerekítve- 400-800 nm. Számítsuk ki a megfelelő fotonenergia-intervallum határait eV egységben!

Megoldás:

3,1 eV-1,55 eV

Milyen hullámhosszúságú fény okoz fotokémiai hatást, ha az ehhez szükséges energia 240 kJ/mol?

Megoldás:

495 nm

11.2. Egy fotodetektor a ráeső monokromatikus fényből 3,8 ms alatt $8{,}0 \times 10^7$ fotont gyűjt össze. Ha a detektor teljesítménye 0,72 μW, mennyi a beeső fény frekvenciája?

Megoldás:

$5{,}2\times10^{16}$ Hz

11.5. Valamely atom ionizációjához $3{,}44 \times 10^{-18}$ J energia szükséges. Ismeretlen hullámhosszú foton elnyelésével az atom ionizálódik, a kilépő elektron kinetikus energiája $1{,}03 \times 10^6$ m s^{-1}. Számítsuk ki az ionizáló sugárzás hullámhosszát.

Megoldás:

50,6 nm

11.11. Számítsuk ki az egyetlen fotonra, valamint mólnyi mennyiségű fotonra jutó energiát a következő sugarak esetében: (a) 600 nm (vörös); (b) 550 nm (sárga); (c) 400 nm (kék); (d) 200 nm (ultraibolya); (e) 150 pm (röntgensugárzás); (f) 1,00 cm (mikrohullámú sugárzás).

11.14. Az 5,0 g tömegű világító bogár 650 nm-es vörös fényt sugároz hátrafelé. E hatás következtében milyen sebességre gyorsul fel 10 év alatt, ha feltételezzük, hogy mozgását semmi sem akadályozza és képes is elélni ilyen hosszú ideig? A kisugárzott teljesítmény 0,10 W.

Megoldás:

21 m/s

11.15. A nátriumlámpa 550 nm-es sárga fényt bocsát ki. Hány fotont bocsát ki másodpercenként, ha teljesítménye (a) 1,0 W; (b) 100 W?

Megoldás:

$2{,}8\times10^{18}$ és $2{,}8\times10^{20}$

K2 Gy **1034*.** Összekeverünk 20 liter 30%-os és 30 liter 25%-os alkoholt. Hány százalék a keverék alkoholtartalma?

Megoldás:

27 %

K2 Gy **1363.** Egy 36 literes edény tele van alkohollal. Az edényből kiöntünk valamennyi folyadékot, és a helyére vizet öntünk. Összekeverés után ismét kiöntünk ugyanannyi folyadékot, mint először. Az edényben 25 liter alkohol maradt. Mennyi alkoholt öntöttünk ki először és mennyit másodszor?

Megoldás:

6 l és 5 l

K2 Gy **1365.** Két rézötvözetünk van. Az első 6 kg, a második 12 kg vörösrezet tartalmaz. A vörösréztartalom százaléka az első ötvözetben 40-nel kisebb, mint a másodikban. Ha a két ötvözetet összeötvözzük, 36%-os vörösréztartalmú ötvözetet kapunk. Hány százalék vörösréz van az első, illetve a második ötvözetben?

Megoldás:

20 %, illetve 60 %

E1 Gy **1395.** Egy szakadék széléről a szakadékba követ ejtünk. A kő földhöz ütődését 10 s múlva halljuk. Milyen mély a szakadék? ($g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$, a hangsebesség $c = 340\ \mathrm{m/s}$.)

Megoldás:

390 m
